Διάλεξη 18η — Διαφορική Γεωμετρία

12/12/2019

Ασκήσεις

1) Θεωρούμε την επιφάνεια S με εξίσωση $z=e^x+e^y$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Αφού δειχθεί ότι είναι κανονική επιφάνεια και ότι η $x:\mathbb{R}^2\to S$ με: $x(u,v)=(u,v,e^u+e^v)$ είναι σύστημα συντεταγμένων, τότε:

i) Να υπολογιστεί η πρώτη και η δεύτερη θεμελιώδης μορφή.

ii) Να υπολογιστεί η καμπυλότητα (κάθετη) στην εφαπτομενική διεύθυνση $c'(1)$, όπου $c(t)=(t,t^2)$!

iii) Υπολογίστε την κάθετη καμπυλότητα στις εφαπτομενικές διευθύνσεις των παραμετρικών καμπυλών του x.

Λύση

Η S είναι κανονική ως επιφάνεια γραφήματος της $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $h(x,y)=e^x+e^y$ ομαλής

$$x(u,v)=(u,v,h(u,v))=(u,v,e^u+e^v)$$

i) $\left.\begin{aligned} x_u(u,v)&=(1,0,e^u)\\ x_v(u,v)&=(0,1,e^v)\end{aligned}\right\}\Rightarrow$ Τα θεμ. ποσά 1ης τάξης

$$E=\|x_u\|^2=1+e^{2u}$$

$$F=\langle x_u,x_v\rangle=e^{u+v}$$

$$G=\|x_v\|^2=1+e^{2v}$$

$$x_{uu}(u,v)=(0,0,e^u)$$

$$x_{uv}=0$$

$$x_{vv}(u,v)=(0,0,e^v)$$

$$N=\frac{X_u\times X_v}{\|X_u\times X_v\|}$$

$$X_u\times X_v=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ 1 & 0 & e^u\\ 0 & 1 & e^v\end{vmatrix}=(-e^u,-e^v,1)$$

$$N=\frac{(-e^u,-e^v,1)}{\sqrt{e^{2u}+e^{2v}+1}}$$

Τα θεμελ. ποσά της $2^{ης}$ τάξης είναι:

$$e=\langle X_{uu},N\rangle=\frac{e^u}{\sqrt{e^{2u}+e^{2v}+1}}$$

$$f=\langle X_{uv},N\rangle=0$$

$$g=\langle X_{vv},N\rangle=\frac{e^v}{\sqrt{e^{2u}+e^{2v}+1}}$$

$$w=aX_u+BX_v\in T_{X(u,v)}S$$

$$I_{X(u,v)}(w)=Ea^2+2FaB+GB^2=$$
$$=(1+e^{2u})a^2+2e^{u+v}aB+(1+e^{2v})B^2.$$

$$II_{X(u,v)}(w)=ea^2+2faB+gB^2=\ldots.$$

ii) Η κάθετη καμπυλότητα στην διεύθυνση w είναι

$$k_n(w)=\frac{II(w)}{I(w)}=\frac{ea^2+2faB+gB^2}{Ea^2+2FaB+GB^2}$$

$C(t)=X(t,t^2)\Rightarrow C'(t)=t'\,X_u(t,t^2)+(t^2)'\,X_v(t,t^2)$

$\Rightarrow C'(t)=X_u(t,t^2)+2t\,X_v(t,t^2)\leadsto$ για $\underline{t=1}$ έχω

$$k_n(\omega) = \frac{e(1,1)\cdot 1^2 + 2f(1,1)\cdot 1\cdot 2 + g(1,1)\cdot 2^2}{E(1,1)\cdot 1^2 + 2F(1,1)\cdot 1\cdot 2 + G(1,1)\cdot 2^2} = \ldots$$

$$k_n(x_u) = \frac{e}{E} = \ldots, \quad k_n(x_v) = \frac{g}{G} = \ldots$$

Γαι Ιμτάει κα καμπυλότητα Gauss:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\frac{e^{u+v}}{e^{2u}+e^{2v}+1}}{\|x_u \times x_v\|^2} = \frac{e^{u+v}}{(e^{2u}+e^{2v}+1)^2} > 0 \Rightarrow$$ όλα τα σημεία της S είναι ελλειπτικά.

- Υπάρχουν ισοεπίπεδα σημεία;

Δεν υπάρχουν διότι $e, g > 0$.

- Υπάρχουν ομφαλικά σημεία;

Αναζητώ (u,v) τ.ω. $\frac{e(u,v)}{E(u,v)} = \frac{f(u,v)}{F(u,v)} = \frac{g(u,v)}{G(u,v)} \neq 0$

$\rightarrow$ δεν υπάρχουν διότι $f=0$ και $F>0$.

Το δείχνω και ως λύση του ζητάει.

2) Δίνεται η επιφάνεια S με εξίσωση $z = x^2 + y^3$ $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Αφού δειχθεί ότι η S είναι κανονική επιφάνεια, να βρείτε τα ελλειπτικά, υπερβολικά και παραβολικά, ισόπεδα και ομφαλικά σημεία της.

Λύση

Η S είναι κανονική ως γράφημα της $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $h(x,y) = x^2 + y^3$.

Η $X: \mathbb{R}^2 \to S$ με $X(u,v) = (u, v, h(u,v))$ είναι σύστημα συντ/νων το οποίο καλύπτει ολόκληρη την S.

$$\left.\begin{array}{l} h_u(u,v)=2u \\ h_v(u,v)=3v^2 \\ h_{uu}(u,v)=2 \\ h_{uv}(u,v)=0 \\ h_{vv}(u,v)=6v \end{array}\right\} \begin{array}{l} E(u,v)=1+(h_u(u,v))^2=1+4u^2 \\ F(u,v)=h_u(u,v)\cdot h_v(u,v)=6uv^2 \\ G(u,v)=1+(h_v(u,v))^2=1+9v^4 \end{array}$$

$$e(u,v)=\frac{h_{uu}(u,v)}{\sqrt{h_u^2(u,v)+h_v^2(u,v)+1}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{4u^2+9v^4+1}}$$

$$K=\frac{eg-f^2}{EG-F^2}$$

$$f(u,v)=\frac{h_{uv}(u,v)}{\sqrt{h_u^2(u,v)+h_v^2(u,v+1}}=0$$

και $$g(u,v)=\frac{h_{vv}(u,v)}{\sqrt{h_u^2(u,v)+h_v^2(u,v)+1}}=\frac{6v}{\sqrt{4u^2+9v^2+1}}$$

Ελλειπτικά σημεία είναι τα σημεία όπου $K>0 \Leftrightarrow$
$eg-f^2>0 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{\cdots}}\cdot\frac{6v}{\sqrt{\cdots}}>0 \Leftrightarrow \boxed{v>0}$

Τα ελλειπτικά σημεία είναι $X(u,v),\ v>0$.

Υπερβολικά είναι τα σημεία όπου $K<0 \Leftrightarrow$
$eg-f^2<0 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{\cdots}}\cdot\frac{9v}{\sqrt{\cdots}}<0 \Leftrightarrow \boxed{v<0}$

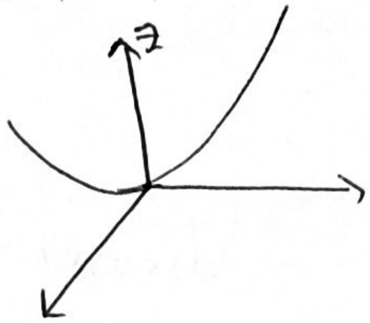
Τα υπερβολικά σημεία είναι $X(u,v),\ v<0$.

Παραβολικά είναι τα σημεία όπου $K=0$ και $H\neq 0$
$\Leftrightarrow eg-f^2=0,\ (e,f,g)\neq(0,0,0) \Leftrightarrow g=0 \Leftrightarrow \boxed{v=0}$

Τα σημεία $X(u,0)$ είναι παραβολικά σημεία ⑤

αφού $(eg-f^2)(u,0)=0$ και $e(u,v)\neq 0$ ~>

$X(u,0) = (u,0,u^2)$



• Ισοπεδα είναι τα σημεια οπου $e=f=g=0$

Δεν υπαρχουν ισοπεδα σημεία, διοτι $e>0$

→ Παρατηρώ ότι πάντα είναι 0

• Ομφαλικά είναι τα σημεία $X(u,v)$ για τα οποία ισχυει:

$$\frac{e(u,v)}{E(u,v)} = \frac{f(u,v)}{F(u,v)} = \frac{g(u,v)}{G(u,v)} \neq 0$$

↳ Επειδή $f(u,v)=0$, $\forall (u,v)$, για να έχω ομφαλικά σημεία πρέπει $F(u,v)=0 \Leftrightarrow 6uv^2=0$

$\Leftrightarrow u=0$ ή $v=0$.

Ομως τα σημεία οπου $v=0$ είναι παραβολικα και αρα οχι ομφαλικά. Υποψήφια δηλαδή ομφαλικά σημεία είναι τα σημεία $\underbrace{X(0,v)}_{u=0}$, $v\neq 0$

$$\frac{e(0,v)}{E(0,v)} = \frac{g(0,v)}{G(0,v)} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{2}{\sqrt{9v^4+1}}}{1} = \frac{\frac{6v^3}{\sqrt{9v^4+1}}}{1+9v^4} \neq 0$$

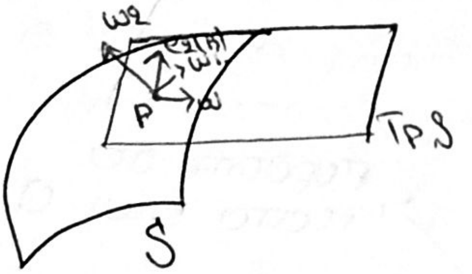
$\Leftrightarrow 1+9v^4 = 3v \Leftrightarrow \boxed{9v^4-3v+1=0}$

Για την λύση της θεωρώ $h(x)=9x^4-3x+1$

$\min h>0 \Rightarrow$ δεν υπαρχουν ομφαλικά σημεία

3) Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των κάθετων καμπυλοτήτων στο σημείο p μιας κανονικής επιφάνειας S για δύο κάθετες διευθ. Είναι ανεξάρτητο αυτών των διευθύνσεων.

Λύση



$w_1, w_2 \in T_pS$

$w_1 \perp w_2$

$\|w_1\| = 1 = \|w_2\|$

Έστω $\{e_1(p), e_2(p)\}$ ορθοκανονική βάση του Τ.ω

$$\begin{cases} L_p e_1(p) = k_1(p) e_1(p) \\ L_p e_2(p) = k_2(p) e_2(p) \end{cases}$$

Από τον τύπο του Euler γνωρίζω ότι:

$$k_n(w) = k_1(p) \cdot \cos^2\theta + k_2(p) \sin^2\theta, \quad \|w\| = 1$$

$$w = \cos\theta\, e_1(p) + \sin\theta\, e_2(p)$$

$$w_1 = \cos\omega\, e_1(p) + \sin\omega\, e_2(p)$$

$$\boxed{k_n(w_1) = k_1(p) \cos^2\omega + k_2(p) \sin^2\omega} : (1)$$

$$w_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right) e_1(p) + \sin\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right) e_2(p)$$

$$k_n(w_2) = k_1(p) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right) + k_2(p) \sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)$$

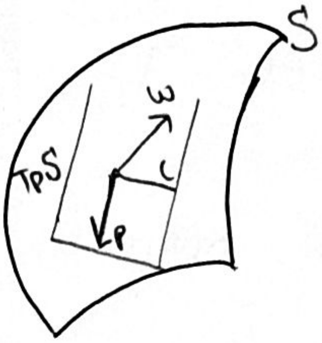
$$\Leftrightarrow \boxed{k_n(w_2) = k_1(p) \sin^2\omega + k_2(p) \cos^2\omega} : (2)$$

$$k_n(w_1) + k_n(w_2) = k_1(p) + k_2(p) = 2H(p)$$

Παρατήρηση:

$$\omega \in T_pS, \quad \|\omega\|=1$$

$$k_n(\omega) = ; \longrightarrow \frac{II_p(\omega)}{I_p(\omega)}$$



Θεωρώ καμπύλη $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ με παράμετρο το μήκος τόξου S ώστε:

$$c(0)=p, \quad \dot{c}(0)=\omega$$

$$k_n(\omega) = \langle N(p), \ddot{c}(0) \rangle$$

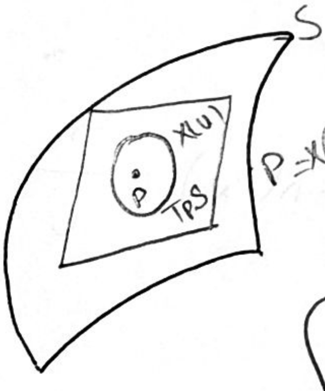
Ασυμπτωτικές διευθύνσεις

Ορισμοί: (i) Ένα διάνυσμα $\omega \in T_pS \setminus \{0\}$ καλείται ασυμπτωτική διεύθυνση $\Leftrightarrow k_n(\omega)=0 \Leftrightarrow II_p(\omega)=0$

(ii) Μια επιφανειακή καμπύλη $c: I \to S$ καλείται ασυμπτωτική καμπύλη της $S \Leftrightarrow c'(t)$ είναι ασυμπ. διεύθυνση $\forall t \in I$ $\Leftrightarrow II_{c(t)}(c'(t))=0, \ \forall t \in I$ $\Leftrightarrow k_n(c'(t))=0$

Αναζήτηση ασυμπτωτικών διευθύνσεων:

$$\omega = a X_u(u_0,v_0) + \beta X_v(u_0,v_0)$$
$$(a,\beta) \neq (0,0)$$



$p = X(u_0,v_0)$. ω ασυμ. διευθ. $\Leftrightarrow II_p(\omega)=0$

$$\Leftrightarrow \boxed{e(u_0,v_0)a^2 + 2f(u_0,v_0)a\beta + g(u_0,v_0)\beta^2 = 0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e(u_0,v_0)\left(\frac{a}{\beta}\right)^2 + 2f\frac{a}{\beta} + g = 0, & \beta \neq 0 \\ e + 2f\frac{\beta}{a} + g\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 = 0, & a \neq 0 \end{cases}$$

$$K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$$

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 4\left(f^2(u_0,v_0) - e(u_0,v_0)g(u_0,v_0)\right)$

<u>Πρόταση</u>: Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να υπάρχουν ασυμπτωτικές διευθύνσεις στο $p \in S$ είναι $K(p) \leq 0$. Επιπλέον ισχύουν:

(i) Αν το p είναι υπερβολικό σημείο τότε $\exists$ 2 ακριβώς ασυμπτωτικές διευθύνσεις

(ii) Αν το p είναι παραβολικό σημείο, τότε υπάρχει 1 ακριβώς ασυμπτωτική διεύθυνση.

(iii) Αν το σημείο p είναι επίπεδο, τότε <u>όλες</u> οι διευθύνσεις είναι ασυμπτωτικές

<u>Αναζήτηση ασυμπτωτικών καμπυλών:</u>

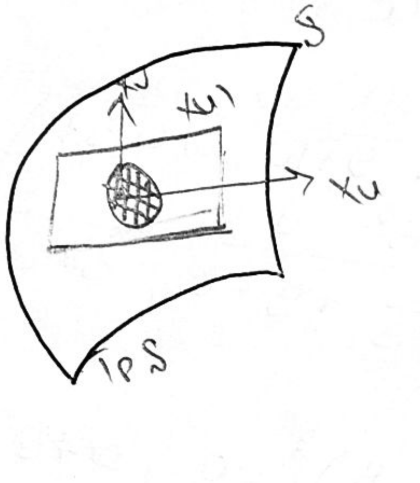
$$c(t) = X(u(t),v(t)) \Rightarrow c'(t) = u'(t)\,X_u(u(t),v(t)) + v'(t)\,X_v(u(t),v(t))$$

c ασυμ. καμπύλη $\Leftrightarrow c'(t)$ είναι ασυμ. διευθ. $\forall t \in I$

$$\Leftrightarrow \boxed{e(u(t),v(t))\,(u'(t))^2 + 2f(u(t),v(t))\,u'(t)v'(t) + g(u(t),v(t))\,(v'(t))^2 = 0}$$

$$w \in T_pS, \quad \|w\| = 1$$

$$k_n(w) = \frac{II_p(w)}{I_p(w)}$$



$$k_n(X_u) = \frac{e}{E}, \quad k_n(X_v) = \frac{g}{G}.$$

Πρόταση: (i) Αν οι παραμετρικές καμπύλες ενός συστήματος συντεταγμένων είναι ασυμπτωτικές, τότε ισχύει $e=g=0$

(ii) Αν $e=g=0$ και όλα τα σημεία είναι υπερβολικά τότε οι ασυμπτωτικές καμπύλες είναι ακριβώς οι παραμετρικές καμπύλες.

$$\left.\begin{array}{l} 2f(u(t),v(t))u'(t)v'(t)=0 \\ -f^2<0 \end{array}\right\} \Rightarrow u'(t)=0 \text{ ή } v'(t)=0$$

$$K<0 \Leftrightarrow eg-f^2<0 \Leftrightarrow -f^2<0$$

Θεώρημα: Έστω S επιφάνεια της οποίας όλα τα σημεία είναι υπερβολικά. Τότε για κάθε $p\in S$ υπάρχει σύστημα συντ/νων $X: U\to S$ με $p\in X(U)$, τ.ω οι παραμετρικές καμπύλες να είναι οι ασυμπ. καμπύλες ($\Leftrightarrow e=g=0$).

Το X καλείται σύστημα ασυμπτωτικών καμπυλών

Παράδειγμα: Δίνεται η επιφάνεια S με εξίσωση $z=x^2-y^2$. Είναι κανονική επιφάνεια ως γράφημα της $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $h(x,y)=x^2-y^2$ και σύστημα συντ/νων $X:\mathbb{R}^2\to S$,

$$X(u,v)=(u,v,h(u,v))=(u,v,u^2-v^2)$$

$$\left.\begin{array}{l} h_u(u,v)=2u \\ h_{uv}(u,v)=0 \\ h_v(u,v)=2v \\ h_{uu}(u,v)=2 \\ h_{vv}(u,v)=-2 \end{array}\right\} \quad e=\frac{h_{uu}}{\sqrt{h_u^2+h_v^2+1}}=\frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}$$

$$f=\frac{h_{uv}}{\sqrt{h_u^2+h_v^2+1}}=0$$

και $g = \frac{h_{vv}}{\sqrt{h_u^2 + h_v^2 + 1}} = -\frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}$

$K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} \rightsquigarrow eg - f^2 = -\frac{4}{4u^2+4v^2+1} < 0$

Άρα όλα τα σημεία είναι υπερβολικά.

Εύρεση των ασυμπτωτικών καμπυλών:

Η κανονική καμπύλη $c(t) = X(u(t), v(t))$ είναι ασυμπ. καμπύλη $\Leftrightarrow$

$e(u(t), v(t))(u'(t))^2 + 2f(u(t), v(t))u'(t)v'(t) + g(u(t), v(t))(v'(t))^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\frac{2}{\sqrt{4u^2(t)+4v^2(t)+1}}(u'(t))^2 \frac{-2}{\sqrt{4u^2(t)+4v^2(t)+1}}(v'(t))^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (u'(t)+v'(t))(u'(t)-v'(t)) = 0 \Leftrightarrow (u(t)+v(t))' = 0$ ή $(u(t)-v(t))' = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u(t)+v(t) = a_1 = \text{σταθ.} \\ \text{ή} \\ u(t)-v(t) = a_2 = \text{σταθ.} \end{cases}$

Υπάρχουν 2 οικογ. ασυμ. καμπυλών:

1η οικογένεια: $u(t) = t$, τότε $v(t) = a_1 - t$.

$c(t) = X(t, a_1 - t) = (t, a_1 - t, t^2 - (a_1 - t)^2)$

$= (t, a_1 - t, t^2 - a_1^2 + 2a_1 t - t^2)$

$= (t, a_1 - t, 2a_1 t - a_1^2)$

$= (0, a_1, -a_1^2) + t(1, -1, 2a_1)$

2η οικογένεια : $u(t)=t, \quad v(t)=t-a_2$

$$c(t) = X(t, t-a_2) = (t, t-a_2, t^2-(t-a_2)^2) =$$
$$(t, t-a_2, t^2-t^2+2a_2t-a_2^2)$$
$$= (t, t-a_2, 2a_2t-a_2^2) = (0, -a_2, -a_2^2) + t(1,1,2a_2)$$

↳ πρόκειται για την καμπύλη "σέλα"

Ορίζω νέες παραμέτρους : $\begin{cases} \bar{u} = u+v \\ \bar{v} = u-v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{2}(\bar{u}+\bar{v}) \\ v = \frac{1}{2}(\bar{u}-\bar{v}) \end{cases}$

$$X(u,v) = X\left(\tfrac{1}{2}(\bar{u}+\bar{v}), \tfrac{1}{2}(\bar{u}-\bar{v})\right) = X\circ\Phi(\bar{u},\bar{v}),$$ όπου

$$\Phi(\bar{u},\bar{v}) = \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}(\bar{u}+\bar{v}), \tfrac{1}{2}(\bar{u}+\bar{v})\right)}_{\text{γραμμική απεικόνιση}}, \quad \Phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

→ Η Φ είναι διαφορομορφισμός ως γραμμικός ισομορφισμός.

ρα η $\bar{X}: \mathbb{R}^2 \to S$ με $\bar{X}(\bar{u},\bar{v}) = X\circ\Phi(\bar{u},\bar{v})$

ναι σύστημα συντεταγμένων ασυμπτωτικών

γραμμών $\to \bar{e} = 0 = \bar{g}$